Sur l'intégration hydraulique des équations différentielles.

Par M. Michel Petrovitch *à Belgrade* (*Serbie*).

---

1. Tous les intégraphes et les appareils pour l'intégration graphique des équations différentielles, proposés jusqu' aujourd'hui, sont fondé sur l'emploi de certains principes cinematiques, p. ex. sur les propriétés des roulettes. On en trouvera la liste et la description dans le Catalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente, von Walther Dyck, München 1892–1893.

Je me propose de montrer ici brièvement comment de telles intégrations peuvent se faire à l'aide des principes d'une nature tout-à-fait autre, facile à réaliser pratiquement, conduisant à des appareils très simples et pouvant intégrer des types assez généraux d'équations différentielles du premier ordre.

Supposons que l'on fasse immerger un corps solide M (Fig. 1) plus ou moins

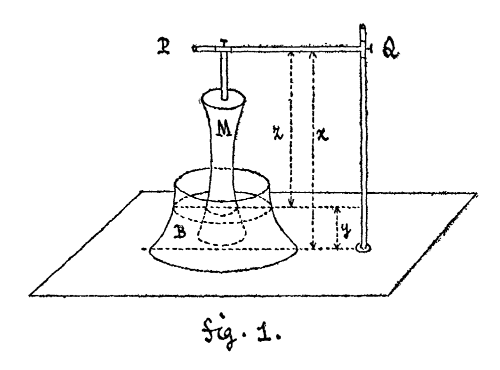


fig. 1.

profondément dans le liquide contenu dans un vase B. Le niveau du liquide montera ou s'abaissera d'après une certaine loi dépendant de la forme du corps M et du vase B et ces formes une fois fixées, la variation de la hauteur du niveau y, comptée à partir d'un plan horizontal fixe, p. ex. à partir de la face inférieure du vase B ne dépendra que de la distance x entre l'extrémité e de la tige ef et la face inférieure du vase B.

Désignons par z la distance entre le niveau du liquide et le plan PQ et soient $\Phi(y)$ et $F(z)$ les aires des sections horizontales du vase B à la hauteur y au-dessus de sa face inférieure et du corps M à la hauteur z comptée à partir du plan PQ. Les fonctions Φ et F dépendent de la forme du vase B et du corps M et ces formes une fois fixées, ces fonctions seront bien détérminées.

On obtiendra la relation entre x et y de la manière suivante.

En faisant immerger le corps M de sorte que x se change en $x - dx$ et y en $y + dy$, le volume du liquide qui s'est élevé au-dessus du niveau y sera

$$[\Phi(y) - F(z)]\, dy.$$

Ce volume est égal au volume du liquide déplacé par le corps M quand celui-ci sera immergé de dz, c'est-à-dire à

$$F(z)\, dz.$$

On en tire l'équation

$$[\Phi(y) - F(z)]\, dy = F(z)\, dz \tag{1}$$

et comme l'on a à chaque instant

$$z = x - y \tag{2}$$

on aura l'équation

$$\Phi(y) \frac{dy}{dx} = F(x - y). \tag{3}$$

C'est l'équation différentielle du problème. En l'intégrant on aura la relation entre les variables x et y. Le rôle de la constante d'intégration joue la hauteur initiale du niveau.

Sur ce principe simple on peut fonder une méthode d'intégration graphique des certains types d'équations différentielles du premier ordre. On conçoit aussi la possibilité de construire plusieurs éspèces de nouveaux intégraphes de constructions simples, où des appareils pour le tracé continu des diverses courbes algébriques ou transcendantes.

Remarquons que dans la pratique il est le plus commode de donner au vase B et au corps M des formes cylindriques (Figs. 2 et 3) ayant deux faces planes

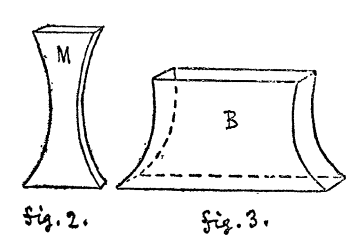


Fig. 2. Fig. 3.

et parallèles au plan de la figure, deux autres faces courbes, cylindriques et per-

pendiculaires à ce plan, et la face inférieure plane et horizontale. On aura alors

$$\left.\begin{aligned}\Phi(y) &= \alpha\phi(y),\\ F(z) &= \beta\theta(z)\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

où α et β désignent les distances des faces parallèles du vase B et du corps M; $\phi(y)$ et $\theta(z)$ désignent leurs largeurs aux hauteurs respectives y et z.

On peut ainsi réaliser de telles formes des fonctions ϕ et θ que l'on voudra; sur une plaque p. ex. métalique on tracera les courbes correspondantes, ayant comme ordonnées horizontales respectives $\phi(y)$ et $\theta(z)$, à l'aide desquelles on formera facilement le vase B et le corps M.

L'équation différentielle deviendra

$$\alpha\phi(y)\frac{dy}{dx} = \beta\theta(x-y). \tag{5}$$

On peut faire varier la distance x de diverses manières, dont je n'indiquerai ici que les plus simples.

2. Imaginons p. ex. un cylindre vertical E (Fig. 4), tournant autour son axe

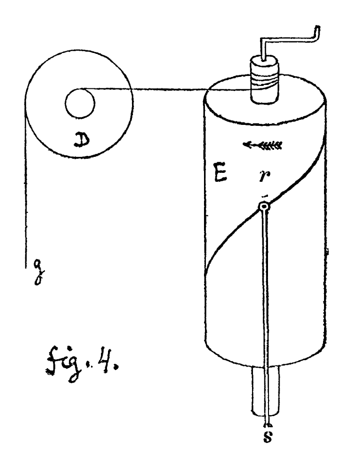


fig. 4.

et une poulie D tournant autour de son axe horizontal, perpendiculaire au plan de figure. Supposons le cylindre et la poulie liés par un fil de manière que si l'extrémité g du fil se meut du haut en bas, le cylindre tourne dans le sens indiqué par la flèche, les chemins parcourrus par g et un point quelconque de l'énveloppe du cylindre étant égaux.

A l'extrémité g est fixé le corps solide M. A l'extrémité s d'une autre tige rs, ne pouvant aussi que glisser verticalement, se trouve fixé un flotteur qui fera monter ou descendre la tige à mésure que le niveau du liquide dans le vase B

monte ou descend. Enfin, à l'extrémité r de la même tige fixons un crayon qui va tracer la courbe intégrale sur l'enveloppe du cylindre.

En faisant immerger le corps M plus ou moins profondément dans le liquide contenu dans le vase B, le niveau montera ou s'abaissera d'une manière continue et le crayon r tracera sur le cylindre la courbe intégrale de l'équation

$$\alpha\varphi(y)\frac{dy}{dx} = \beta\theta(x - y),$$

où x et y seront l'abscisse et l'ordonnée d'un point quelconque de cette courbe. La courbe ainsi obtenue sera l'intégrale particulière de cette équation prenant pour $x = h$ la valeur $y = k$, h et k désignant les valeurs initiales de x et de la hauteur de niveau au-dessus du plan RS.

L'appareil servira donc pour l'intégration graphique des équations différentielles de la forme

$$\frac{dy}{dx} = f(y)\psi(x - y); \tag{6}$$

on donnera pour cela au vase B une forme telle qu'on ait

$$\varphi(y) = \frac{1}{\alpha f(y)}$$

et au corps solide M une forme telle qu'on ait

$$\theta(z) = \frac{1}{\beta}\psi(z),$$

où α et β désignent les largeurs respectives de B et de M.

Si les rayons de la poulie D et du cylindre E n'étaient pas égaux, l'appareil servirait à l'intégration graphique des équations de la forme

$$\frac{dy}{dx} = f(y)\psi(ax - y). \tag{7}$$

Envisageons deux cas particulièrement simples qui peuvent se présenter.

1°. Si le corps M est prismatique, de sorte qu'on ait

$$\theta(z) = \text{const.} = \beta',$$

on aurait

$$x = \frac{\alpha}{\beta\beta'}\int\varphi(y)\,dy$$

et l'appareil servirait comme intégraphe pour la courbe d'intersection du vase B avec le plan de figure.

2°. Si le vase B est prismatique de sorte qu'on ait

$$\phi(y) = \text{const.} = \alpha',$$

l'appareil construira les courbes intégrales des équations de la forme

$$\frac{dy}{dx} = \psi(x - y).$$

En y posant

$$x - y = z,$$

l'équation devient

$$\frac{dz}{dx} = 1 - \psi(z).$$

d'où

$$x = \int \frac{dz}{1 - \psi(z)}$$

et l'appareil servira aussi dans ce cas comme intégraphe. Mais comme le crayon r décrit la courbe (x, y), cette courbe une fois construite, pour avoir z, correspondant à une valeur donnée de x, on retranchera y de x.

3. Au lieu de la disposition du paragraphe précédent, imaginons deux cylindres verticaux D et E de même diamétre, liés entre eux de manière (Fig. 5) que

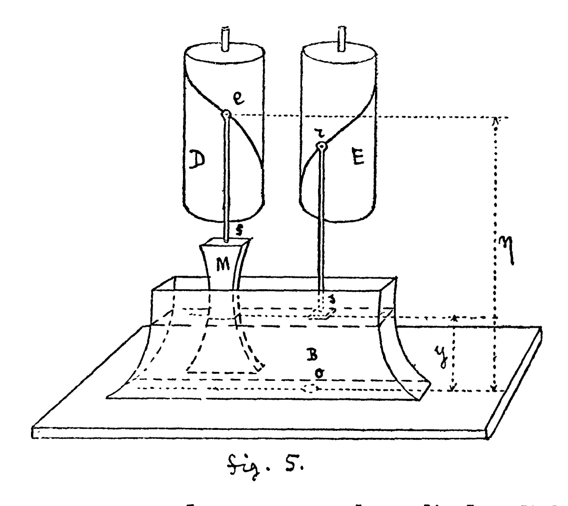


Fig. 5.

si le cylindre E se meut autour de son axe, le cylindre D le fait aussi. Fixons le corps solide M à l'extrémité f de la tige ef ne pouvant se déplacer que verticalement et ayant à son extrémité supérieure un clou métalique, qui touche à chaque instant l'enveloppe du cylindre D. A l'extrémité s d'une autre tige rs ne pouvant également se mouvoir que verticalement, fixons un flotteur qui fera monter ou descendre la tige à mésure que le niveau du liquide dans le vase B monte ou descend. Enfin, à l'extrémité r de la même tige fixons un crayon qui va tracer la courbe intégrale sur l'enveloppe du cylindre.

Supposons que sur le cylindre D soit enroulé un papier, sur lequel est tracée la courbe

$$\eta = f(\xi),$$

l'abscisse ξ étant comptée le long de la périphérie de la base du cylindre et l'ordonnée η le long des génératrices, à partir du plan fixe de la base du vase B.

En faisant tourner les cylindres p. ex. à l'aide d'une manivelle et assujettissant l'extrémité e de la tige ef à se trouver à chaque instant sur la courbe

$$\eta = f(\xi)$$

(par exemple en la guidant par la main, à mésure que la cylindre tourne), on aura à chaque instant

$$x = \eta = f(\xi)$$

et la hauteur du niveau, considérée comme fonction de ξ, sera donnée par l'intégration de l'équation différentielle

$$\alpha\phi(y)\frac{dy}{dx} = \beta\theta\,[f(\xi) - y]\,f'(\xi), \tag{8}$$

où l'intégrale pour $\xi =$ valeur initiale de l'abscisse, p. ex. $\xi = 0$, doit avoir la valeur $y =$ valeur initiale k de la hauteur du niveau, qui joue le rôle de la constante d'intégration. Cette intégrale sera donc tracée sur l'enveloppe du cylindre E par le crayon r.

Si p. ex. le corps M est prismatique de sorte qu'on ait

$$\theta(z) = \text{const.} = a,$$

la courbe décrite par le crayon r sera l'intégrale de l'équation

$$\alpha\phi(y)\frac{dy}{dx} = a\beta f'(\xi),$$

d'où

$$\frac{a\beta}{\alpha}\Big[f(\xi) - f(0)\Big] = \int_{\kappa}^{y}\phi(y)\,dy.$$

En donnant au vase B et à la courbe $\eta = f(\xi)$ des formes convenables, l'appareil pourra servir à éffectuer le tracé continu de la courbe

$$y = \Psi\,[f(\xi)],$$

où Ψ est une fonction donnée à l'avance, lorsque la courbe $\eta = f(\xi)$ est construite etc.

Il est facile à voir que l'appareil peut servir de diverses manières comme intégraphe.

4. Concevons le même appareil que celui décrit dans le paragraphe précédent, mais avec les modifications suivantes:

1°. Les cylindres D et E tournent par action d'un mécanisme d'horlogerie, autour de leurs axes verticaux avec une vitesse uniforme, de manière qu'un point des leurs enveloppes respectives parcoure l'unité de longueur pendant l'unité de temps.

2°. Le liquide contenu dans le vase B s'écoule continuellement à travers un orifice pratiqué sur la face inférieure du vase B, dont on peut régler la largeur à volonté.

Le crayon r décrira alors sur l'enveloppe du cylindre E certaine courbe, dont on aura l'équation différentielle de la manière suivante. Si dans l'intervale de temps dt on fait immerger le corps M de sorte que x se change en $x - dx$ et y en $y + dy$, la quantité du liquide qui s'est élevée au-dessus du niveau y sera

$$[\alpha\phi(y) - \beta\theta(z)]\, dy$$

et cette quantité est égale à la différence de la quantité du liquide déplacé par le corps M quand celui-ci sera immergé de dz et celle qui s'est ecoulée par l'orifice pendant le temps dt, c'est-à-dire à la différence

$$\beta\theta(z)\, dz - \lambda\sqrt{y}\, dt,$$

où

$$\lambda = \mu\Omega\sqrt{2g}$$

(μ étant le coefficient de contraction du liquide, Ω l'aire de l'orifice O et g la constante de gravitation). On en tire l'équation différentielle

$$[\alpha\phi(y) - \beta\theta(z)]\, dy = \beta\theta(z)\, dz - \lambda\sqrt{y}\, dt$$

et comme l'on a à chaque instant

$$z = x - y = f(t) - y,$$

l'équation différentielle du problème sera

$$\alpha\phi(y)\frac{dy}{dt} + \lambda\sqrt{y} - af'(t) = 0.$$

L'intégrale de cette équation, qui pour $t = 0$ prend la valeur $y = h$, égale à la valeur initiale de la hauteur du niveau, représente la loi de variation de cette hauteur avec le temps. Le crayon r tracera la courbe intégrale sur l'enveloppe du cylindre E.

On a ainsi l'intégration graphique des équations différentielles de la forme

$$\frac{dy}{dx} + F(y) = \Phi(y)\Psi(x)$$

(où F, Φ, Ψ sont des fonctions positives dans l'intervale considéré des variables) et de celles qui s'en déduisent par les changements de la forme

$$t = \Psi(\xi), \quad y = \theta(u);$$

il n'y a pour cela qu'à choisir convenablement les fonctions $\phi(y)$, $\theta(z)$ et $f(t)$, c'est-à-dire la forme du vase B, du corps M et de la courbe tracée sur le cylindre D.

En donnant p. ex. au vase B une forme telle qu'on ait

$$\alpha\phi(y) = \frac{1}{4\sqrt[4]{y}}$$

et au corps M une forme telle qu'on ait

$$\beta\theta(z) = \text{const.} = a$$

et en traçant sur le cylindre D la courbe correspondant à

$$f(t) = a\int \chi(t)\, dt,$$

la courbe (y, t) tracée par le crayon r sur le cylindre E, sera telle qu'à chaque instant la valeur $\sqrt[4]{y(t)}$ est égale à la valeur correspondante de l'intégrale $u(t)$ de l'équation de Riccati

$$\frac{du}{dt} \chi(t) - \lambda u^2,$$

qui pour $t = 0$ prend la valeur $\sqrt[4]{h}$, h étant la hauteur initiale du niveau.

Des principes analogues s'appliquent à bien d'autres types d'équations. On aurait des types nouveaux d'équations intégrables graphiquement en faisant p. ex. varier l'aire de l'ouverture O suivant les lois données, ce qui est facile à faire à l'aide d'un troisième cylindre à l'axe horizontal, sur lequel serait tracée la courbe correspondant à la loi donnée.